

Разбор задачи “Про дороги” V сетевой районной олимпиады Республики Карелия по информатике

Итак, напомним коротко условие задачи. Дана матрица размером N строк и M столбцов. В каждой ячейке матрицы записано число от 0 до 9. Каждому нужно построить маршрут из ячейки $(1, 1)$ (левой верхней) в ячейку (N, M) (правую нижнюю). Разрешается ходить только вправо и вниз. Запрещается выходить за пределы матрицы. Ценой маршрута назовем произведение значений всех ячеек, входящих в маршрут.

Требуется найти такой маршрут, чтобы его цена была максимальной среди всех возможных маршрутов. Требуется найти такой маршрут, чтобы его цена была минимальной среди всех возможных маршрутов. Требуется вывести разницу между значениями «максимального» и «минимального» маршрута.

Данная задача является одной из классических задач на динамическое программирование (с этим термином Вы можете познакомиться в Интернете). Разобьем задачу на две одинаковые задачи для поиска минимального и максимального по стоимости пути. Заведем функцию от двух переменных: $dp_{max}(i, j)$, где i — номер строки, а j — номер столбца. Тогда $dp_{max}(i, j)$ будет означать максимальную цену пути добраться из клетки $(1, 1)$ в (i, j) . Как же посчитать значение $dp_{max}(i, j)$ для любых i и j ? Заметим, что в клетку (i, j) мы можем попасть только сверху или справа, и никак иначе. Значит, значение можно записать следующие равенство $dp_{max}(i, j) = c(i, j) \times \max(dp_{max}(i-1, j), dp_{max}(i, j-1))$, где $c(i, j)$ — значение ячейки (i, j) исходной матрицы.

Для поиска пути на минимум в формуле исправляем \max на \min . Ответом будет значение $dp_{max}(N, M) - dp_{min}(N, M)$. Такое решение набирает полный бал. Его оценка сложности — $O(N * M)$.

Также в этой задаче полный бал набирает решение, выполняющие рекурсивный перебор для нахождения ответа. Действительно, у нас бывает всего лишь не 2^{17} состояний переходов, потому перебор уложится в отведенные временные ограничения. Почему 2^{17} и что такое перебор? Давайте напишем рекурсивную функцию, которая находясь в клетке (i, j) выбирала бы куда пойти, продолжая уже полу-построенный маршрут. Вариантов, куда пойти не много, только вниз или вправо, соответственно, у нас сразу же исчезает из будущего рассмотрения или часть столбца i или часть строки j . И мы можем заметить, что длина пути всегда равняется $N + M - 1$ клеток. Когда мы попали в клетку (N, M) , мы считаем цену пути (последовательность ходов мы сохраняем в глобальном массиве), и если она лучше максимального/минимального значения путей,

переписываем их. Не забываем, что за пределы матрицы выходить нельзя. Оценка сложности данного решения — $O(2^{N+M-1})$.

Более подробно детали реализации можно посмотреть в решениях жюри.

*Разбор подготовил Басунков Владимир
Андреевич, преподаватель Клуба творчества
программистов ПетрГУ.*