Лекция 8.
Введение в комбинаторику.

План лекции

- Что такое комбинаторика?
- Размещения
- Сочетания
- Перестановки
- Треугольник Паскаля
- Биномиальный коэффициент

Комбинаторика

Это раздел математики, изучающий множества дискретных (отдельных) объектов и их отношения.

На практике комбинаторикой решаются различные задачи распределения, а также задачи о связях внутри множеств (в том числе задачи теории графов).

Важно знать

<u>Множество</u> – совокупность отдельных элементов, мыслимая, как единое целое.

<u>Подмножество</u> – множество, все элементы которого также входят в другое множество.

Размещения

Размещение – это **упорядоченный** набор из **k различных** элементов множества различных **n** элементов, **k ≤ n**.

Например, размещением можно назвать выбор диджея на радио, когда он крутит песни в прямом эфире: из всего множества доступных ему композиций он должен выбрать какое-то количество различных, и ставить их в определённом порядке.

Размещения

Задача: если всего песен **n**, а надо выбрать **k**, сколько в теории можно составить вариантов различных программ?

Разберём решение для n = 4, k = 3.

{1, 2, 3, 4} => {?, ?, ?}

Размещения

{1, 2, 3, 4} => {?, ?, ?}

На первом шаге можно выбрать любой из доступных элементов исходного множества.

{x, 2, 3, 4} => {1, ?, ?}

На втором наш выбор сокращается на один.

{x, x, 3, 4} => {1, 2, ?}

На третьем – ещё на один.

{x, x, x, 4} => {1, 2, 3}

Размещения

{1, 2, 3, 4}   =>   {?, ?, ?}

Это не зависит от того, какие элементы мы выбираем.

{1, 2, x, 4}   =>   {3, ?, ?}

Выбор всё равно всегда сокращается на один.

{x, 2, x, 4}   =>   {3, 1, ?}

А невыбранными остаются **n-k** чисел.

{x, 2, x, x}   =>   {3, 1, 4}

Размещения

Место	Элемент																							
1	1						2						3						4					
2	2		3		4		1		3		4		1		2		4		1		2		3	
3	3	4	2	4	2	3	3	4	1	4	1	3	2	4	1	4	1	2	2	3	1	3	1	2

Количество различных размещений

Размещения

Пошевелив мозгами, можно прийти к выводу, что количество размещений будет равняться $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$.

<u>Факториал числа</u> - это произведение по очереди всех чисел от 1 до этого числа.

Тогда $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$ можно записать как $\frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \cdots \times 1}{(n-k) \times \cdots \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Размещения

Формально:

Количество различных размещений из **n** элементов по **k** обозначается A_n^k и считается по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки

Перестановка – это **упорядоченный** набор из **n** различных элементов множества различных **n** элементов.

Проще говоря, перестановка – это размещение из **n** по **n**.

Например, перестановкой можно назвать порядок, в котором ученики одного класса зашли в аудиторию: их количество неизменно, но меняется и важен порядок.

Перестановки

Задача: если всего в классе **n** учеников, то сколько может быть различных порядков их прихода в класс?

На самом деле всё абсолютно точно так же, как в размещениях, потому что перестановка – это и есть размещение при **k**=**n**. Считаем:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Перестановки

Формально:

Количество различных перестановок **n** элементов обозначается P_n и считается по формуле

$$P_n = n!$$

Сочетания

Сочетание – это **неупорядоченный** набор из **k** **различных** элементов множества различных **n** элементов, **k ≤ n**.

Проще говоря, сочетание – это размещение, в котором неважен порядок элементов.

{1, 2, 3} = {1, 3, 2} = {3, 2, 1}

Сочетания

Например, сочетанием можно назвать набор победителей в лотерее: из всего множества участников лотереи только определённое количество получит призы.

Задача: если в лотерее **n** участников, а призов **k**, то сколько может быть различных наборов победителей? Разберём для **n**=6, **k**=3.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \{?, ?, ?\}$$

Сочетания

{1, 2, 3, 4, 5, 6}   =>   {?, ?, ?}

На первом шаге можно выбрать любой из доступных элементов исходного множества.

{x, 2, 3, 4, 5, 6} =>   {1, ?, ?}

Пока всё идёт, как в размещениях.

{x, x, 3, 4, 5, 6} =>   {1, 2, ?}

Один в один.

{x, x, x, 4, 5, 6} =>   {1, 2, 3}

Сочетания

{1, 2, 3, 4, 5, 6} => {?, ?, ?}

Но так как в сочетании не учитывается порядок, нет смысла сначала выбирать более поздний элемент, а потом – более ранний.

{x, x, 3, 4, 5, 6} => {2, ?, ?}

Поэтому элементы сочетаний всегда условно отсортированы.

{x, x, x, x, 5, 6} => {2, 4, ?}

Значит, если выбирать по порядку – надо идти от меньшего к большему (или наоборот).

{x, x, x, x, x, 6} => {2, 4, 5}

Сочетания

Место	Элемент																			
1	1										2						3			4
2	2				3			4		5	3			4		5	4		5	5
3	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6	4	5	6	5	6	6	5	6	6	6

Количество различных сочетаний

Сочетания

Представим сейчас, что мы искали не сочетания, а размещения. Получить все сочетания из всех размещений легко, просто выкинув лишние результаты (объединив те из них, которые отличаются только порядком элементов). То есть, для каждого сочетания надо будет сократить группу размещений в количество перестановок длины **k**.

Сочетания

1 2 3	2 1 3	3 2 1	4 1 2
1 2 4	2 1 4	3 1 4	4 1 3
1 3 2	2 3 1	3 2 1	4 2 1
1 3 4	2 3 4	3 2 4	4 2 3
1 4 2	2 4 1	3 4 1	4 3 1
1 4 3	2 4 3	3 4 2	4 3 2

Пример:

из размещений из 4 по 3 получаем сочетания

Сочетания

1 2 3			4 1 2
1 2 4	2 1 4	3 1 4	4 1 3
			4 2 1
1 3 4	2 3 4	3 2 4	4 2 3
1 4 2	2 4 1	3 4 1	4 3 1
1 4 3	2 4 3	3 4 2	4 3 2

Пример:

из размещений из 4 по 3 получаем сочетания

Сочетания

1 2 3			4 1 2
1 2 4	2 1 4	3 1 4	4 1 3
			4 2 1
1 3 4	2 3 4	3 2 4	4 2 3
1 4 2	2 4 1	3 4 1	4 3 1
1 4 3	2 4 3	3 4 2	4 3 2

Пример:

из размещений из 4 по 3 получаем сочетания

Сочетания

1 2 3			
1 2 4		3 1 4	4 1 3
1 3 4	2 3 4	3 2 4	4 2 3
		3 4 1	4 3 1
1 4 3	2 4 3	3 4 2	4 3 2

Пример:

из размещений из 4 по 3 получаем сочетания

Сочетания

1 2 3			
1 2 4		3 1 4	4 1 3
1 3 4	2 3 4	3 2 4	4 2 3
		3 4 1	4 3 1
1 4 3	2 4 3	3 4 2	4 3 2

Пример:

из размещений из 4 по 3 получаем сочетания

Сочетания

1 2 3

1 2 4

1 3 4	2 3 4	3 2 4	4 2 3
	2 4 3	3 4 2	4 3 2

Пример:

из размещений из 4 по 3 получаем сочетания

Сочетания

1 2 3

1 2 4

1 3 4 2 3 4

Пример:
из размещений из 4 по 3 получаем сочетания

Сочетания

```
1 2 3
1 2 4
1 3 4
2 3 4
```

Пример:
из размещений из 4 по 3 получаем сочетания

Сочетания

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_k = k!$$

$$\frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Сочетания

Формально:

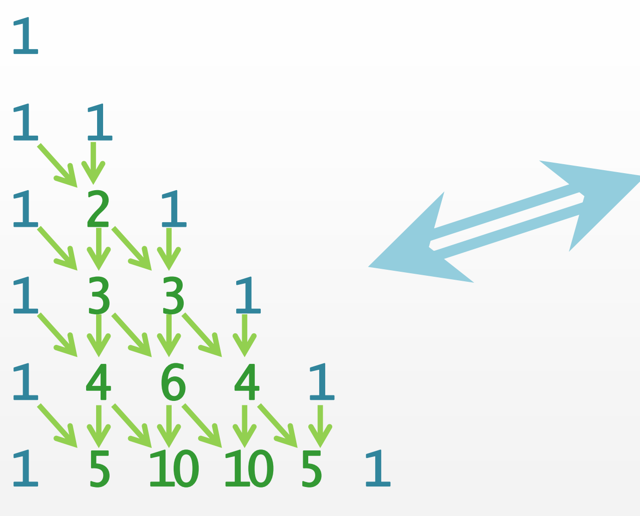
Количество различных сочетаний из **n** элементов по **k** обозначается C_n^k и считается по формуле

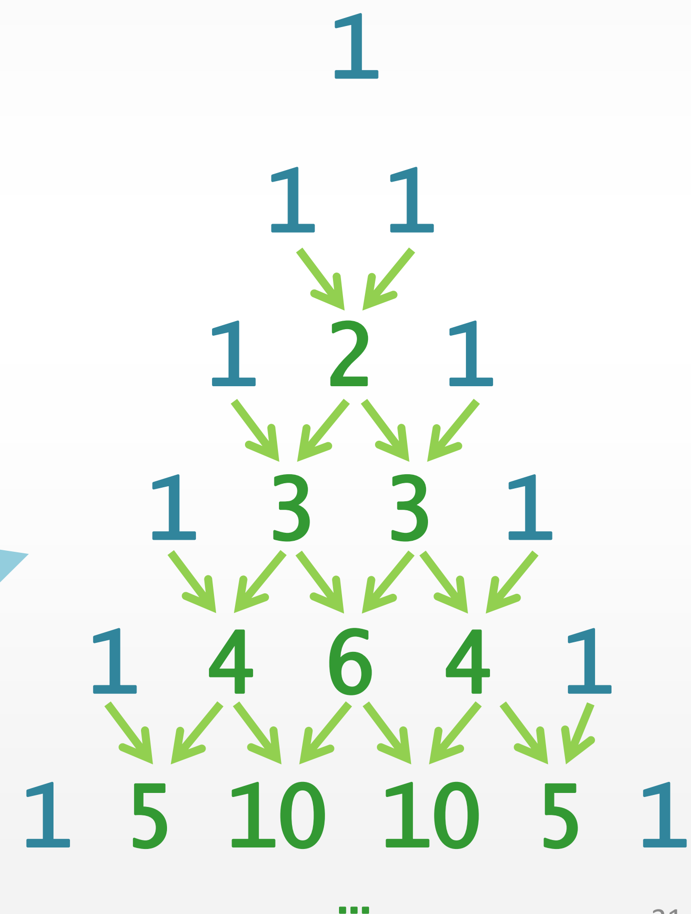
$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Треугольник Паскаля

Это – таблица, построенная по свойствам:

$$\begin{cases} C[i][1] = 1 \ \forall j \\ C[i][i] = 1 \ \forall i \\ C[i][j] = C[i-1][j-1] + C[i-1][j] \end{cases}$$





Биномиальный коэффициент

C_n^k – биномиальный коэффициент.

$C_1^k = 1$

$C_n^1 = 1$

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

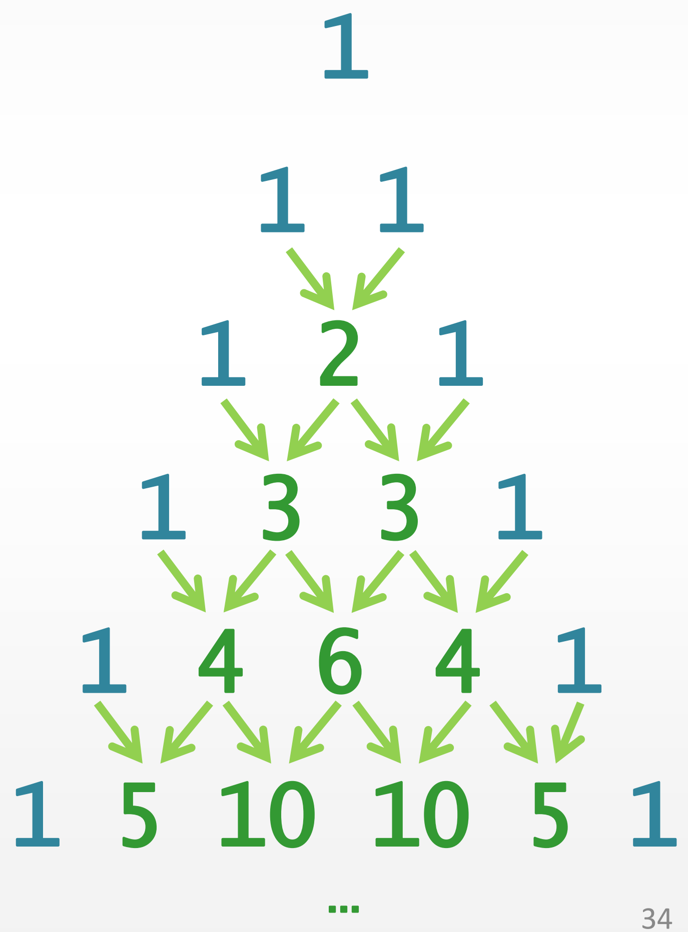
Биномиальный коэффициент

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \times \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \times \left(\frac{k}{(n-k)k} + \frac{n-k}{(n-k)k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \times \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \mathrm{C}_{n}^{k}
\end{aligned}
$$

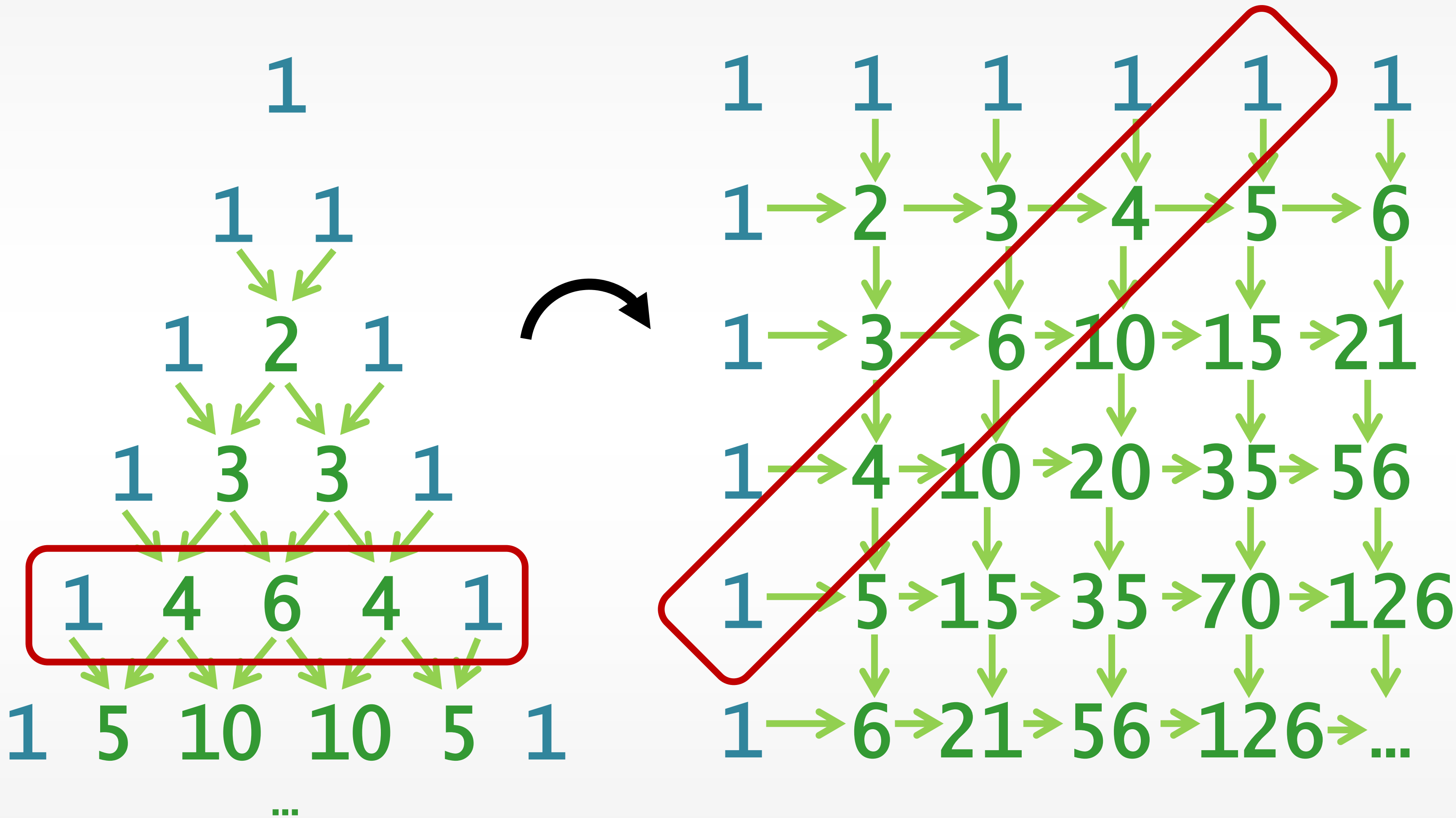
Биномиальный коэффициент

$$\begin{cases} C[i][1] = 1 \ \forall j \\ C[i][i] = 1 \ \forall i \\ C[i][j] = C[i-1][j-1] + C[i-1][j] \end{cases}$$

$$C_i^j = C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^{j}$$



Биномиальный коэффициент



C_n^k = C[n][k]

C_n^k = C[n-k][k]

Вопросы?