Лекция 9.
Генерация перестановок и сочетаний.

План лекции

- Лексикографический порядок
- Следующая лексикографически перестановка
- Получение перестановки по номеру
- Получение номера по перестановке
- Рекурсивная генерация перестановок
- Следующее лексикографически сочетание

Лексикографический порядок

Это способ сортировки упорядоченных множеств, элементы которых можно сравнивать между собой.

Например, в лексикографическом порядке перечислены слова в словарях, а «меньшей» считается буква, расположенная в алфавите раньше.

Лексикографический порядок

Алгоритм сравнивания множеств **A** и **B**:

1) **k** = 0
2) Попытка сравнить элементы A_k и B_k
3) Если одного из этих элементов нет, он считается меньше того, что есть.
4) Если нет обоих элементов, множества **A** и **B** равны. Конец.
5) Если A_k меньше B_k – множество **A** меньше множества **B**, и наоборот. Конец.
6) Если A_k и B_k равны, **k** увеличивается на единицу, алгоритм переходит к шагу 2.

Лексикографический порядок

Сортировка лексикографически перестановок работает по точно такому же алгоритму.

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

Следующая лексикографически перестановка

Перестановка – это **упорядоченный** набор из **n** различных элементов множества различных **n** элементов.

Проще говоря, перестановка – это размещение из **n** по **n**.

Например, перестановкой можно назвать порядок, в котором ученики одного класса зашли в аудиторию: их количество неизменно, но меняется и важен порядок.

Следующая лексикографически перестановка

Пусть дана перестановка 1 3 5 4 2.

Нужно получить перестановку, следующую после неё в лексикографическом порядке.

Так как это перестановка, нужно будет только переставлять числа, не добавляя новые.

Так как порядок лексикографический, имеет смысл вносить изменения как можно левее.

Следующая лексикографически перестановка

Чтобы получить следующую перестановку, надо найти самое левое число такое, что его можно будет заменить на другое, бóльшее, число.

1 3 5 4 2

Следующая лексикографически перестановка

Утверждается, что таким числом будет первое же число, которое окажется меньше, чем его правый сосед. Это верно потому, что это число надо будет заменить на одно из тех, что правее него, и оно должно быть больше.

1 3 5 4 2

Следующая лексикографически перестановка

В данном случае наше число – 3. Его надо будет поменять местами с 4 (т.к. оно минимальное из бо́льших).

1 3 5 4 2

1 4 5 3 2

Наконец, числа, оставшиеся правее заменённого числа, надо упорядочить по возрастанию:

1 4 2 3 5

Получение перестановки по номеру

Если известен порядковый номер **k** перестановки длины **n** в перечислении всех перестановок длины **n**, можно найти эту перестановку.

Для этого следует вспомнить, что перестановок длины **n** всего существует $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

Получение перестановки по номеру

Перестановок длины n, начинающихся с одного определённого элемента, всего (n-1)!, а в лексикографическом порядке такие перестановки идут подряд: сначала (n-1)! перестановок с первым элементом 1, потом (n-1)! с первым элементом 2 и так далее.

Получение перестановки по номеру

Пусть **n**=**5**, **k**=**31**.

1) (**n**-1)! = 4! = 24
2) **k** > 1*24, значит, эта перестановка будет начинаться не с 1.
3) **k** < 2*24 – перестановка начинается с 2.
4) Теперь сократим параметры для работы с оставшейся частью перестановки:
   n = **n** – 1 = **4**, **k** = **k** – 1*24 = **7**

Получение перестановки по номеру

$n=4$, $k=7$, 2 больше не используется

1) $(n-1)! = 3! = 6$
2) $k > 1*6$, значит, второй элемент перестановки – не 1.
3) $k < 3*6$, наш элемент - 3
4) Теперь сократим параметры для работы с оставшейся частью перестановки:
   $n = n - 1 = 3$, $k = k - 1*6 = 1$

Получение перестановки по номеру

n=**3**, **k**=**1**, 2 и 3 больше не используются

1) (**n**-1)! = 2! = 2
2) **k** < 1*2, значит, наш элемент - 1
3) Теперь сократим параметры для работы с оставшейся частью перестановки:
   n = **n** – 1 = **2**, **k** = **k** – 1*2 = **-1**

Получение перестановки по номеру

n=**2**, **k**=**-1**, 2, 3 и 1 больше не используются

1) **k** < 1, значит, остальные элементы просто перечисляются в порядке возрастания.

Наш ответ:

2 3 1 4 5

Получение номера по перестановке

Обратная задача: существует перестановка, требуется получить её порядковый номер.

Это можно найти, посчитав для каждого элемента, сколько есть меньших элементов правее него.

2 3 1 4 5

1 1 0 0 0

(1) (1)

Получение номера по перестановке

Теперь мы будем производить операции, обратные тем, что мы делали, когда сокращали параметры в получении перестановки по номеру:

$k = 1*4! + 1*3! + 0*2! + 0*1! + 1 = 24 + 6 + 1 = 31$

2 3 1 4 5

1 1 0 0 0

(1) (1)

Рекурсивная генерация перестановок

Чтобы сгенерировать все перестановки длины n в лексикографическом порядке, можно использовать простую рекурсию: для каждого возможного значения элемента перебирать возможные значения его правого соседа.

Рекурсивная генерация перестановок

```
1:
1 2:
1 2 3:
1 2 3 4
1 2 4:
1 2 4 3
1 3:
1 3 2:
1 3 2 4
1 3 4:
1 3 4 2
1 4:
1 4 2:
1 4 2 3
1 4 3:
1 4 3 2
```

```
2:
2 1:
2 1 3:
2 1 3 4
2 1 4:
2 1 4 3
2 3:
2 3 1:
2 3 1 4
2 3 4:
2 3 4 1
2 4:
2 4 1:
2 4 1 3
2 4 3:
2 4 3 1
```

```
3:
3 1:
3 1 2:
3 1 2 4
3 1 4:
3 1 4 2
3 2:
3 2 1:
3 2 1 4
3 2 4:
3 2 4 1
3 4:
3 4 1:
3 4 1 2
3 4 2:
3 4 2 1
```

```
4:
4 1:
4 1 2:
4 1 2 3
4 1 3:
4 1 3 2
4 2:
4 2 1:
4 2 1 3
4 2 3:
4 2 3 1
4 3:
4 3 1:
4 3 1 2
4 3 2:
4 3 2 1
```

Следующее лексикографически сочетание

Сочетание – это **неупорядоченный** набор из **k** **различных** элементов множества различных **n** элементов, **k** ≤ **n**.

Проще говоря, сочетание – это размещение, в котором неважен порядок элементов.

Количество сочетаний из n по k = $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Следующее лексикографически сочетание

Если количество элементов множества, из которого будет делаться выборка, $n = 4$, а размер сочетания $k = 3$, то вот все сочетания из n по k в лексикографическом порядке:

1 2 3

1 2 4

1 3 4

2 3 4

Следующее лексикографически сочетание

Так как это сочетание, нужно будет работать с числами из исходного множества, которых может не оказаться в текущем сочетании.

Так как порядок лексикографический, всё ещё имеет смысл вносить изменения как можно левее.

Следующая лексикографически перестановка

Чтобы получить следующее сочетание, надо найти самое левое число такое, что его порядковый номер с конца в сочетании больше, чем его порядковый номер с конца в исходном множестве:

(8) (7) (5) (1) (0)

1 2 4 8 9

(4) (3) (2) (1) (0)

Следующая лексикографически перестановка

В данном случае наше число – 5. Его надо будет увеличить на 1.

1 2 4 8 9

1 2 5 8 9

Наконец, числа, оставшиеся правее заменённого числа, надо заменить на минимально возможную возрастающую последовательность:

1 2 5 6 7

Вопросы?